

Obwiednia

Pojęcie ‘obwiednia’ wprowadził i teorię obwiedni opracował – w pracy *De linea ex lineis numero infiniti ordinatim ductis inter se concurrentibus easque omnes tangentes* (1692) – Gottfried Wilhelm Leibniz. **Obwiednią** rodziny krzywych płaskich nazywamy krzywą, która jest styczna do każdej krzywej tej rodziny. Jeśli rodzinę tę opisuje równanie

$$F(x, y, p) = 0,$$

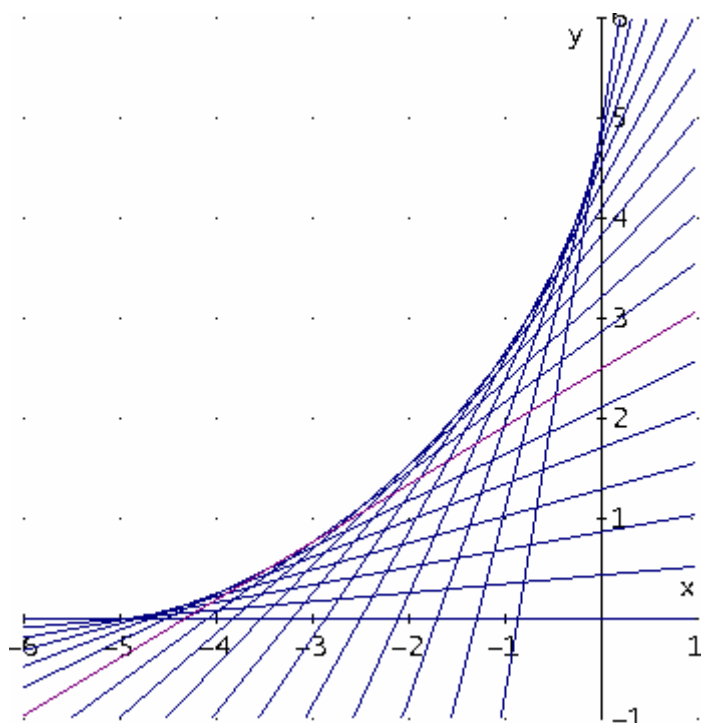
gdzie p oznacza parametr tej rodziny (jego konkretna wartość identyfikuje/wskazuje konkretną krzywą), to – bezpośrednio z warunku styczności wynika, iż – obwiednię opisuje układ

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F_p(x, y, p) = 0, \end{cases}$$

gdzie F_p oznacza pochodną cząstkową wyrażenia F względem jej drugiego argumentu,

$$F_p := \frac{\partial}{\partial p} F ;$$

Powyższy układ nazywamy równaniem rozwiązującym obwiedni.



18 prostych z rodziny $\{ y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x + 5 \cdot \sin\varphi : \varphi \in (0, \pi/2) \}$ – mianowicie te dla $\varphi = k \cdot 5^\circ$, $k=0,1,2,\dots,17$; przykładowo, dla $\varphi = 30^\circ$ jest to prosta

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{5}{2}.$$

Przykład. Po ośiach układu Oxy współrzędnych kartezjańskich przesuwają się końce odcinka o danej długości a . Każdy z tych odcinków, poza leżącymi na osi pionowej Oy , leży (zob. rysunek powyżej) na prostej o równaniu

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x + a \cdot \sin\varphi,$$

gdzie φ oznacza kąt nachylenia tej prostej do osi poziomej Ox . Ten kąt jednoznacznie wyznacza (odcinek i zarazem) prostą, jest parametrem identyfikującym konkretną prostą w rodzinie

$$F(x, y, p) = 0,$$

gdzie $F(x, y, p) := \operatorname{tg} \varphi \cdot x - y + a \cdot \sin \varphi$.

Dlatego układem rozwiązującym jest układ

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varphi \cdot x - y + a \cdot \sin \varphi = 0, \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot x + a \cdot \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

Z drugiego z tych równań otrzymujemy od razu

$$x = -a \cdot \cos^3 \varphi,$$

uwzględniając ten związek w pierwszym równaniu układu rozwiązującego uzyskujemy

$$y = -a \cdot \sin^3 \varphi;$$

i tak mamy równanie (parametryczne – parametrem jest kąt $\varphi \in <0, \pi/2>$)

$$\begin{cases} x = -a \cdot \cos^3 \varphi, \\ y = a \cdot \sin^3 \varphi \end{cases}$$

obwiedni rodziny prostych mających równanie $y = \operatorname{tg} \varphi \cdot x + a \cdot \sin \varphi$, $\varphi \in <0, \pi/2>$. Uzupełniając zakres zmienności parametru φ o wartość $\pi/2$ (inaczej mówiąc: domykając przedział $<0, \pi/2>$) widzimy, że obwiednia tej rodziny prostych jest łuk zaczynający się w punkcie $(-a, 0)$ i kończący w punkcie $(0, a)$, łuk przebiegający od jego końca lewego w kierunku końca prawego, zatem przebiegający w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Łuk ten przebiega się w kierunku przeciwnym – a więc od punktu $(0, a)$ do punktu $(-a, 0)$ – gdy jest opisany jak następuje:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 \theta, \\ y = a \cdot \sin^3 \theta; \end{cases}$$

Opis ten otrzymujemy podstawiając $\varphi = \pi - \theta$ i zmieniając kąt θ w zakresie od $\pi/2$ do π (a więc tak, jak w układzie biegunowym $Or\theta$ standardowo zmienia się kąt – w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara – określający punkty w II ćwiartce układu współrzędnych).

Oba równania parametryczne obwiedni (zarówno to z parametrem φ , jak i to z parametrem θ), po podniesieniu ich stronami do potęgi $3/2$ i następnie ich dodaniu stronami dają (po skorzystaniu ze wzoru na jedynekę trygonometryczną) dają równanie uwikłane rozważanej obwiedni:

Postępując identycznie, jak powyżej (gdy uzyskaliśmy opis parametryczny obwiedni odcinków, które leżące w II ćwiartce układu kartezjańskiego Oxy ślizgają się po osiach) stwierdzamy, że obwiednia rodziny

$$\{ F(x, y, \varphi) = 0 : \varphi \in <0, 2\pi> \},$$

gdzie $F(x, y, \varphi) := \operatorname{tg} \varphi \cdot x - y + 5 \cdot \sin \varphi$,

ma równanie parametryczne/wektorowe

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 \theta, \\ y = a \cdot \sin^3 \theta, \end{cases}$$

gdzie $\theta \in <0, 2\pi>$ i przy tym przedstawieniu

- obwiednia jest obiegana standardowo (tzn. zgodnie z ruchem wskazówek zegara),
- obszar, który ona ogranicza, znajduje się po jej lewej stronie.

Stąd od razu wynika, że obwiednia ta ma równanie uwikłane

Otrzymana krzywa nazywana była kubocykloidą (cykloidą sześcienną), paracyklem, tetrakuspidą (ang. tetracuspid – mająca cztery punkty zwrotne), w roku 1836 Karl Ludwig von Littrow nazwał ją **astroidą** (z greckiego ἀστέρι = gwiazda) i właśnie ta nazwa się rozpowszechniła. Pierwszy astroidę badał, w 1647, duński astronom Ole Rømer, gdy poszukiwał kształtów zębatek (asteroida jest hipotrochoidą/hipocykloidą, kreśli ją ustalony punkt okręgu poruszającego się bez poślizgu po wewnętrznej stronie nieruchomego okręgu mającego 4-krotnie większy promień). Badali tę krzywą także Johann Bernoulli (1691), Gottfried Wilhelm Leibniz (w liście datowanym w roku 1715 otrzymał równanie uwikłane astroidy i dlatego nazywa się je niekiedy równaniem leibnizowskim), Daniel Bernoulli (w 1725 zauważył, że kreśli ją także toczący się okrąg mający promień o długości równej $\frac{3}{4}$ długości okręgu nieruchomego; to, że powstaje ona niejako dwójako, określa się jako podwójną generacyjność astroidy, astroidy kreślone z promieniem $a = A/4$ jest przebiegana zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zaś z promieniem $a = 3A/4$ – w kierunku przeciwnym) i Jean le Rond d'Alembert (1748).

Astroida

- stanowi rozwiązanie zadania o drabinie o długości a , którą podnosi się z ziemi przesuwając jej górny koniec po murze,
- jest także rozwiązaniem zadania o wykonalności przesunięcia w korytarzu załamanym pod kątem prostym szafy matematycznej (tzn. szafy mającej grubość 0),
- jest także obwiednią rodziny elips mających taką samą sumę długości swych osi, a więc zbioru $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 : a + b = c\}$, gdzie c jest ustaloną liczbą dodatnią,
- katakaustyką^{1]} równoległych deltoidu, tzn. obwiednią odbitych od deltoidu promieni padających nań równolegle; jeśli deltoid (trikuspid, pierwszy rozważał go L.Euler w 1745, w 1856 Jakob Steiner – i stąd nazywa się także hipocykloidą Steinera) jest opisany parametrycznie

$$x = 2\cos t + \cos(2t),$$

$$y = 2\sin t - \sin(2t),$$

to obwiednia ta ma równanie

$$x = 3\cos t + \cos(3t+2\varphi) - \cos(2\varphi),$$

$$y = 3\sin t - \sin(2t+2\varphi) + \sin(2\varphi),$$

gdzie φ oznacza kąt, pod jakim na deltoid padają promienie.

^{1]} Katakaustyka krzywej płaskiej nazywamy obwiednią promieni świetlnych odbitych od tej krzywej. Pierwsze obserwacje na temat tego, jak odbijają się promienie świetlne w stożkowych, poczyni już Apoloniusz z Perga (260-190 BC). Dogłębne badanie katakaustyk podjął Eirenfried Tschirnhaus – niemiecki lekarz, fizyk, filozof i matematyk – w 1682, szeroko przedstawił w pracach *Methodus curvas determinandi, quae formantur a radiis reflexis, quorum incidentes ut paralleli considerantur, per D.T. i Curva geometria, quae seipsam su evolutione describit, aliasque insignes proprietates obtinet, inventa a D.T.* (obie opublikowane w *Acta eruditorum* w 1690). Katakaustyka paraboli zwana jest tschirnhausowską krzywą sześcienną/kubiczną, ang. Tschirnhausen cubic). Katakaustyki oraz diakaustyki (obwiednie krzywymi, które powstają wskutek refrakcji), obejmowane są wspólnym określeniem 'kaustyki', terminologię tę (z greckiego καυστος = palący – o słońcu, o promieniach) wprowadził Johann Bernoulli w *Curvae dia-causticae, earum relatio ad evolutas, aliaque nova his affinia* (1693).